Entwicklung eines völlig einzigartigen geometrischen Problems *

Leonhard Euler

§1 Ich bin im Begriff hier eine geometrische Frage einer Untersuchung zu unterwerfen, die, weil sie sich auf eine noch nicht behandelte Gattung bezieht, umso größerer Aufmerksamkeit würdig erscheint, weil die Lösung, welche die Analysis an die Hand gibt, so beschaffen ist, dass aus ihr kaum verstanden werden kann, ob jener Frage eine einzige oder mehrere oder sogar unendlich viele Kurven ihr Genüge leisten. Und in der Tat erinnere ich mich auch nicht, dass andere Probleme von dieser Art von den Geometern behandelt worden sind, welche einer solchen Ungewissheit unterworfen sind, dass sogar nach Finden einer analytischen Lösung wir die Frage nicht beantworten können, ob sie zur Gattung der bestimmten oder unbestimmten Fragen zu zählen ist. Daher bezweifle ich nicht, dass die Entwicklung der Frage, die ich hier in Angriff nehmen möchte, eine Gelegenheit geben wird, die Grenzen unserer analytischen Erkenntnisse nicht unwesentlich zu erweitern.

§2 Die allbekannte Eigenschaft des Kreises, nach welcher eine den von zwei Tangenten gebildeten Winkel halbierende Gerade den Kreis orthogonal schneidet, wirft die hier zu behandelnde Frage auf.

*Original Titel: "Problematis cuiusdam geometrici prorsus singularis evolutio ", zuerst publiziert in: *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae, Band 16* (1772, verfasst 1771): pp. 140–159, Nachdruck in: Opera Omnia: Serie 1, Band 28, pp. 187 – 204, Eneström-Nummer E422, übersetzt von: Alexander Aycock für den "Euler-Kreis Mainz".

Nachdem natürlich (Fig. 1)[1] die von ihrer Lage gegebene Gerade AB vorgelegt worden ist,

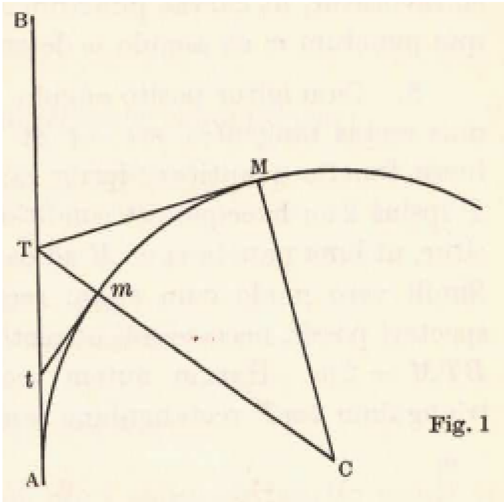

Fig. 1

wird eine Kurve AmM solcher Art gesucht, dass nach Zeichnen einer Tangente MT zu einem beliebigen Punkt M, welche Tangente jene Gerade AB im Punkt T treffe, die den Winkel ATM halbierende Gerade TC dieselbe Kurve in m orthogonal schneidet.

Es ist also offenkundig, dass dieser Frage der Kreis Genüge leistet, der die von der Lage her gegebene Gerade AB irgendwo berührt; und weil so der Berührpunkt wie die Größe des Kreises unserem Belieben überlassen ist, entstehen daraus zwar unendlich viele Lösungen, die aber dennoch alle, weil sie ja in der selben Gattung enthalten sind, zu verstehen sind nur quasi eine einzige Lösung darzustellen. Daher besteht der Hauptpunkt dieser Frage darin, ob außer den Kreisen andere Kurven gegeben sind, welchen dieselbe Eigenschaft zufällt.

§3 Den Geist also vom Kreis lösend wollen wir die vorgelegte Frage so angehen, dass wir analytisch in voller Allgemeinheit nach den Kurven suchen, die mit der erwähnten Eigenschaft versehen sind. Aber die Methode dieses Problem zu lösen scheint sehr im Verborgenen zu liegen, weil die zwei Punkte M und m, deren Zusammenhang nicht hinreichend definiert wird, zur selben Kurve zu zählen sind, während für den einen Punkt M die Tangente, für

[1] Der Scan zeigt die Figur aus der Opera Omnia Version.

den anderen Punkt m hingegen die Normale zur Kurve betrachtet werden muss, welche zwei Geraden MT und mT so in der gegebenen Gerade AB zusammentreffen müssen, dass diese Gerade mT den Winkel ATM zweiteilt. Und die Relation der zwei Punkte M und m ist in der Tat nicht reziprok, wie es in vielen anderen Fragen dieser Art passiert, wo aus einer bestimmten Relation von zwei Punkten die Natur der Kurve ausfindig gemacht werden muss.

§4 Um also die Natur der zwei Punkte m und M einander anzugleichen, wollen wir auch zu m eine Tangente mt konstruieren, die die gegebene Gerade AB in t trifft, und nun ist es offenkundig, dass die Relation zwischen den Buchstaben At und tm mit derselben Gleichung ausgedrückt werden muss wie die Relation zwischen den Geraden AT und TM, wo also zu sehen ist, wie diese beiden Relationen miteinander verbunden sind. Für dieses Ziel betrachte man den Winkel Btm, welchen man $= \omega$ nenne, und wegen des rechten Winkels TMt werden wir den Winkel $ATm = 90^\circ - \omega$ haben; weil diesem nach der Bedingung des Problems der Winkel MTm gleich sein muss, wird der Winkel $MTB = 2\omega$ sein, woher die Lösung darauf reduziert wurde, dass der Punkt M der Kurve auf dieselbe Weise aus dem Winkel 2ω bestimmt wird wie der Punkt m aus dem Winkel ω bestimmt wird.

§5 Weil also, nachdem der Winkel $Btm = \omega$ gesetzt worden ist, der Winkel $BTM = 2\omega$ ist, wollen wir die Tangenten $mt = t$ und $MT = T$ nennen, und nun ist es ersichtlich, dass T eine solche Funktion von 2ω sein muss, wie t eine Funktion von ω war; und dies ist die wegen des Gesetzes der Fortsetzung verlangte Bedingung, mit welcher bewirkt wird, dass die zwei Punkte m und M zur selben Kurve gehören. Weil aber in gleicher Weise auch die Gerade At als Funktion des Winkels $Btm = \omega$ angesehen werden kann, ist es notwendig, dass die Gerade AT die vollkommen gleiche Funktion des doppelten Winkels $BTM = 2\omega$ ist. Weil aber die Differenz Tt dieser Geraden At und AT wegen des rechtwinkligen Dreiecks tmT

$$Tt = \frac{t}{\cos \omega}$$

sein muss, wird aus dieser Bedingung die Lösung des Problems abzuleiten sein. Darüber hinaus wird es förderlich sein hier zu bemerken, dass der Winkel $Btm = \omega$ die Amplitude des Bogens Am bezeichnet, sodass die Amplitude des Bogens AM die doppelte von jener ist.

§6 Um deshalb diese Frage zu aufzulösen, wollen wir (Fig. 2)[2] sehen,

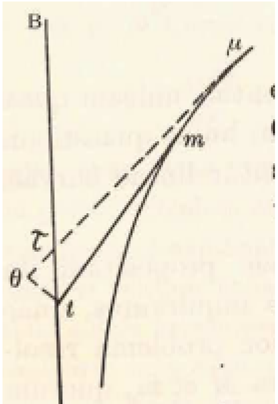

Fig. 2

wie durch den Winkel $Btm = \omega$ und die Tangente $tm = t$ die Strecke At auf der von Lage her gegebenen Gerade AB bestimmt wird, wo es freilich unwesentlich ist, wo der feste Punkt A angenommen wird. Nachdem also die der Kurve unendlich nahe Tangente $\mu\tau$ gezeichnet worden ist, dass der Winkel $B\tau\mu = \omega + d\omega$ und daher der Winkel $t\mu\tau = d\omega$ ist, woher nach Beschreiben des Zentrums m oder μ der unendliche kleinen Bogen $t\varepsilon$ den verlängerten Strahl $\mu\tau$ bei θ trifft, wird $t\theta = td\omega$ sein, und daher wird wegen $\theta t\tau = 90^\circ - \omega$

$$t\tau = \frac{td\omega}{\sin\omega},$$

was das Inkrement der Strecke At ist, sodass wir daraus

$$At = \int \frac{td\omega}{\sin\omega}$$

schließen. Nachdem dieser Ausdruck auf die erste Figur übertragen worden ist, wenn wir für t T und stelle des Winkels ω sein doppeltes 2ω schreiben, liefert das Gesetz der Fortsetzung

$$AT = \int \frac{2Td\omega}{\sin 2\omega} = \int \frac{Td\omega}{\sin\omega\cos\omega},$$

woher man das Intervall

[2]Der Scan zeigt die entsprechende Figur der Opera Omnia Version.

$$Tt = \int \frac{Td\omega}{\sin\omega\cos\omega} - \int \frac{td\omega}{\sin\omega}$$

findet, welches der Größe $\frac{t}{\cos\omega}$ gleich zu machen ist.

§7 Nachdem also die Differentiale genommen worden sind, erhalten wir diese Gleichung:

$$\frac{Td\omega}{\sin\omega\cos\omega} - \frac{td\omega}{\sin\omega} = \frac{dt}{\cos\omega} + \frac{td\omega\sin\omega}{\cos^2\omega},$$

welche auf diese zurückgeführt wird

$$\frac{Td\omega}{\sin\omega\cos\omega} = \frac{dt}{\cos\omega} + \frac{td\omega}{\sin\omega\cos^2\omega}$$

und daher auf diese:

$$T\cos\omega = t + \frac{dt}{d\omega}\sin\omega\cos\omega.$$

Deshalb ist diese Frage nun darauf zurückgeführt worden, dass für t eine Funktion solcher Art von ω ausfindig zu machen ist, dass, wenn für T die gleiche Funktion von 2ω geschrieben wird, der gefundenen Gleichung Genüge geleistet wird. Es wird aber noch eine Methode vermisst, wie Bedingungen solcher Art zu erfüllen sind, besonders wenn allgemeine Lösungen verlangt werden. Deswegen wird es nicht unnütz sein, die gefundene Gleichung in mehrere andere zu überführen, aus welchen die, die einfachste war, auch am leichtesten behandelt werden können wird.

§8 Der Winkel ω muss freilich immer in der Rechnung behalten werden, weil durch ihn die sich auf die zwei Punkte m und M zu beziehenden Größen am bequemsten definiert werden. Wir wollen also die Strecken $At = x$ und $AT = X$ setzen, sodass nun in gleicher Weise X eine solche Funktion von 2ω sein muss, wie x eine von ω war. Weil wir also

$$\int \frac{Td\omega}{\sin\omega\cos\omega} = X \quad \text{und} \quad \int \frac{td\omega}{\sin\omega} = x$$

haben, wird daher

$$t = \frac{dx\sin\omega}{d\omega}$$

und nun wird die Lösung des Problems auf diese Gleichung geführt:

$$X - x = \frac{dx}{d\omega} \tan\omega$$

oder

$$X \cos\omega = \frac{dx}{d\omega} \sin\omega + x\cos\omega.$$

Wenn wir daher weiter $x\sin\omega = y$ und in gleicher Weise $X\sin 2\omega = Y$ setzen, dass

$$X\cos\omega = \frac{Y}{2\sin\omega}$$

ist, geht diese einfachere Gleichung hervor:

$$\frac{Y}{2\sin\omega} = \frac{dy}{d\omega} \quad \text{oder} \quad Y = \frac{2dy}{d\omega}\sin\omega,$$

welcher Gleichung so Genüge geleistet werden muss, dass Y eine solche Funktion 2ω ist, wie y eine von ω war.

§9 Wir können auch für den Punkt m die Normale mT in die Rechnung einführen; denn nachdem der Kürze wegen $mT = p$ und der der Normale im Punkt M zukommende Punkt $= P$ gesetzt worden ist, weil $p = t\tan\omega$ ist, wird in gleicher Weise $P = T\tan 2\omega$ sein und wegen

$$t = \frac{p\cos\omega}{\sin\omega} \quad \text{und} \quad T = \frac{P\cos 2\omega}{\sin 2\omega}$$

geht die die Lösung enthaltende Gleichung in diese Form über:

$$\int \frac{2Pd\omega\cos 2\omega}{(\sin 2\omega)^2} - \int \frac{pd\omega\cos\omega}{(\sin\omega)^2} = \frac{p}{\sin\omega},$$

welche differenziert gibt:

$$\frac{2Pd\omega\cos 2\omega}{(\sin 2\omega)^2} - \frac{pd\omega\cos\omega}{(\sin\omega)^2} = \frac{dp}{\sin\omega} - \frac{pd\omega\cos\omega}{(\sin\omega)^2}$$

oder

$$Pd\omega\cos 2\omega = 2dp\sin\omega\cos^2\omega = dp\cos\omega\sin 2\omega,$$

sodass

$$P = \frac{dp}{d\omega}\cos\omega\tan 2\omega.$$

§10 Auch der Bogen Am der Kurve kann in die Rechnung eingeführt werden (Fig. 2), welchen man $= s$ setze, sodass die Relation zwischen diesem Bogen $Am = s$ und seiner Amplitude ω zu bestimmen ist. Aber aus Figur 1 wird dies sehr leicht geleistet werden, weil nämlich, nachdem die Tangente $mt = t$ gesetzt worden ist,

$$\mu\tau = t + dt \quad \text{und} \quad m\mu = ds$$

ist, wird wegen $t\theta = td\omega$ und daher

$$\tau\theta = \frac{td\omega\cos\omega}{\sin\omega}$$

auch

$$\mu\theta = t + dt + \frac{td\omega\cos\omega}{\sin\omega},$$

welche Gerade $\mu = t + ds$ gleich gesetzt werden muss, woher man findet:

$$ds = dt + \frac{td\omega\cos\omega}{\sin\omega} = \frac{d.t\sin\omega}{\sin\omega}$$

und daher

$$t = \frac{1}{\sin\omega}\int ds\sin\omega.$$

Daher, wenn in gleicher Weise der Bogen $AM = S$ gesetzt wird, während die Tangente $MT = T$ ist, werden wir

$$T = \frac{1}{\sin 2\omega}\int dS\sin 2\omega = \frac{1}{\sin\omega\cos\omega}\int dS\sin\omega\cos\omega$$

haben, welche Werte in die oben gefundene Gleichung

$$T\cos\omega = t + \frac{dt}{d\omega}\sin\omega\cos\omega$$

eingesetzt werden müssen, woher man

$$\frac{1}{\sin\omega}\int dS \sin\omega\cos\omega = \frac{1}{\sin\omega}\int ds\sin\omega + \frac{ds}{d\omega}\sin\omega\cos\omega - \frac{\cos^2\omega}{\sin\omega}\int ds\sin\omega$$

oder

$$\int dS\sin\omega\cos\omega = \sin^2\omega\int ds\sin\omega + \frac{ds}{d\omega}\sin^2\omega\cos\omega$$

findet.

§11 Nach Differenzieren dieser Gleichung geht

$$dS\sin\omega\cos\omega = 2d\omega\sin\omega\cos\omega\int ds\sin\omega + ds\sin^3\omega$$
$$+\frac{dds}{d\omega}\sin^2\omega\cos\omega + 2ds\sin\omega\cos^2\omega - ds\sin^3\omega$$

hervor und nach Teilung durch $\sin\omega\cos\omega$ wird

$$dS = 2d\omega\int ds\sin\omega + 2ds\cos\omega + \frac{dds}{d\omega}\sin\omega.$$

Nach erneuter Differentiation erhalten wir:

$$ddS = 2d\omega ds\sin\omega + 2dds\cos\omega - 2d\omega ds\sin\omega + \frac{d^3s}{d\omega}\sin\omega + dds\cos\omega$$

und daher

$$ddS = 3dds\cos\omega + \frac{d^3s}{d\omega}\sin\omega,$$

wo freilich das Differential $d\omega$ als konstant anzusehen ist. Es ist sofort klar, dass dieser Gleichung Genüge geleistet wird, indem $\frac{ddS}{d\omega^2}$ genommen wird, weil dann auch $\frac{ddS}{d\omega^2} =$ wird; daher berechnet man aber $s = a + b\omega$, sodass der Bogen $Am = s$ der Amplitude proportional ist, welches eine allbekannte Eigenschaft des Kreises ist.

§12 Wenn daher also weiter der Krümmungsradius der Kurve in $m = r$, in M hingegen $= R$ gesetzt wird, weil ja dann

$$ds = rd\omega \quad \text{und} \quad dS = 2Rd\omega$$

wird, überführen wir die gerade gefundene Gleichung leicht auf Krümmungsradien, woher

$$2dR = 3dr\cos\omega + \frac{ddr}{d\omega}\sin\omega,$$

resultiert, wo um vieles klarer ist, dass Kreise Genüge leisten, weil für konstanten Krümmungsradius die Bedingung dieser Gleichung erfüllt ist. Weiter kann die Evolute der Kurve AmM eingeführt werden, wenn deren Krümmungsradius im Punkt $m = r'$, für den Punkt M hingegen $= R'$ gesetzt wird, weil bekannt ist, dass

$$dr = r'd\omega \quad \text{und} \quad dR = 2R'd\omega$$

gilt, geht diese Gleichung hervor:

$$4R' = 3r'\cos\omega + \frac{dr'}{d\omega}\sin\omega.$$

Daher ist unsere Frage darauf zurückgeführt worden, dass beurteilt wird, ob dieser Gleichung durch andere Werte außer $r' = 0$ und $R' = 0$ Genüge geleistet werden kann.

§13 Weil

$$ds = dt + \frac{td\omega\cos\omega}{\sin\omega}$$

ist, wird der Krümmungsradius der Kurve in m, welchen wir r gesetzt haben,

$$= \frac{ds}{d\omega} = \frac{dt}{d\omega} + \frac{t\cos\omega}{\sin\omega}$$

sein, und der Krümmungsradius in M

$$R = \frac{dT}{2d\omega} + \frac{T\cos 2\omega}{\sin 2\omega},$$

mit welchen wir die in m und M zur Kurve gezogenen und in C zusammentreffenden Normalen vergleichen wollen. Weil aber

$$\text{der Winkel } MTC = ATC = 90^\circ - \omega$$

ist, wird wegen $MT = T$

$$MC = \frac{T\cos\omega}{\sin\omega} = \frac{t}{\sin\omega} + \frac{dt}{d\omega}\cos\omega$$

sein, sofern man die oben gefundene Relation zwischen den Tangenten $mt = t$ und $MT = T$ zur Hilfe nimmt. Dann hat man daraus aber weiter:

$$CT = \frac{T}{\sin\omega} = \frac{t}{\sin\omega\cos\omega} + \frac{dt}{d\omega},$$

wovon man die Strecke

$$Tm = t\tan\omega = \frac{t\sin\omega}{\cos\omega}$$

abziehe, dass

$$mC = \frac{t\cos\omega}{\sin\omega} + \frac{dt}{d\omega}$$

zurückbleibt, woraus es ersichtlich ist, dass diese Gerade mC dem Krümmungsradius in m gleich wird und daher der Punkt C auf der Evolute der gesuchten Kurve gefunden wird.

§14 Weil die Normale mC ja die Evolute der gesuchten Kurven in C berührt, die Normale MC hingegen durch denselben Punkt hindurchgeht, wird sie hier die Evolute schneiden, wenn die Evolute zu einem einzigen zusammengezogen wird, wie es beim Kreis passiert. Daher, wenn außer dem Kreis andere Kurven unserer Frage Genüge leisten, müssen deren Evoluten so beschaffen sein, dass, wenn die Normale mC die Evolute in C berührt, die Normale MC dieselbe hier schneidet, sie verlängert aber an anderer Stelle berührt, und so ist es notwendig, dass alle Tangenten der Evoluten dieselbe zugleich an einem anderen Ort schneiden, wie was passieren in allen Tangenten gelingen kann, wird nur erkannt, wenn zufällig lediglich Spriralkurven zu verwenden sind. Aber die ommense Schwierigkeit die merkwürdigen Figuren dieser Art zu begreifen bedeutet keineswegs deren Unmöglichkeit, und daher lässt sich nicht schließen, dass außer den Kreisen keine anderen Kurven der Frage Genüge leisten können.

§15 Obwohl aber kaum ein Weg bekannt ist die gefundenen Gleichungen aufzulösen, gibt dennoch die, die die einfachste zu sein scheint:

$$Y = \frac{2dy}{d\omega}\sin\omega,$$

für welche

$$x = \frac{y}{\sin\omega} \quad \text{und} \quad mt = t = \frac{dx\sin\omega}{\omega} = \frac{dy}{d\omega} - \frac{y\cos\omega}{\sin\omega}$$

ist, woher

$$ds = \frac{ddy}{d\omega} + yd\omega$$

wird, einen nicht unwesentliches Argument an die Hand, nach welchem außer den Kreisen alle anderen Figuren ausgeschlossen zu werden scheinen. Wenn wir nämlich die allgemeine Lösung suchend setzen:

$$\begin{aligned} y = A - B\omega^2 \ + C\omega^4 - D\omega^6 + E\omega^8 - \text{etc.} \\ +\mathfrak{A}\omega - \mathfrak{B}\omega^3 + \mathfrak{C}\omega^5 - \mathfrak{D}\omega^7 + \mathfrak{E}\omega^9 - \text{etc.}, \end{aligned}$$

dass nach dem Gesetz der Fortsetzung gilt:

$$\begin{aligned} Y = A - 2^2B\omega^2 \ + 2^4C\omega^4 - 2^6D\omega^6 + 2^8E\omega^8 - \text{etc.} \\ +2\mathfrak{A}\omega - 2^3\mathfrak{B}\omega^3 + 2^5\mathfrak{C}\omega^5 - 2^7\mathfrak{D}\omega^7 + 2^9\mathfrak{E}\omega^9 - \text{etc.}, \end{aligned}$$

ist es ersichtlich, dass so die geraden wie die ungeraden Potenzen einzeln bestimmt werden können.

§16 Wir wollen der Kürze wegen

$$\sin\omega = \omega - \alpha\omega^3 + \beta\omega^5 - \gamma\omega^7 + \delta\omega^9 - \text{etc.}$$

setzen, dass

$$\alpha = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}, \quad \beta = \frac{\alpha}{4\cdot 5}, \quad \gamma = \frac{\beta}{6\cdot 7}, \quad \delta = \frac{\gamma}{8\cdot 9} \quad \text{etc.}$$

ist und für die geraden Potenzen liefert wegen

$$\frac{dy}{d\omega} = -2B\omega + 4C\omega^3 - 6D\omega^5 + 8E\omega - \text{etc.}$$

die Gleichung

$$\frac{2dy}{d\omega}\sin\omega - Y = 0$$

diese Gleichung:

$$\begin{array}{rllllll}
0 = & -4B\omega^2 & +\,8C\ \omega^4 & -\,12D\omega^6 & +\,16E\ \ \omega^8 & -\,20\quad \omega^{10} & \\
 & & +\,4\alpha & -\,8\alpha C & +\,12\alpha D & -\,16\alpha E & \\
 & & & -\,4\beta B & +\,8\beta C & -\,12\beta D & \\
 & & & & +\,4\gamma B & -\,8\gamma C & \\
 & & & & & -\,4\delta B & \\
 & -A+2^2B & -\,2^4C & + & -\,2^8E & +\,2^{10}F & -\text{etc.,}
\end{array}$$

woher man $A = 0$ berechnet, dann gehen aber nach Division durch 4 diese Gleichungen hervor: +

$$\begin{aligned}
(2^2-2)C &= \alpha B\\
(2^4-3)D &= 2\alpha C + \quad \beta B\\
(2^6-4)E &= 3\alpha D + 2\beta C + \quad \gamma B\\
(2^8-5)F &= 4\alpha E + 3\beta D + 2\gamma C + \delta B\\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

§17 Auch wenn sich daher kein gefälliges Gesetz der Progression erhoffen lässt, passiert es dennoch wider Erwarten, dass für $B = \frac{a}{1\cdot 2}$ die folgenden Werte gefunden werden:

$$B = \frac{a}{1\cdot 2},\quad C = \frac{a}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4},\quad D = \frac{a}{1\cdot\cdots\cdot 6},\quad E = \frac{a}{1\cdot\cdots\cdot 8}\quad \text{etc.}$$

und in gleicher Weise findet man für die ungeraden Potenzen:

$$\mathfrak{A} = b,\quad \mathfrak{B} = \frac{b}{1\cdot 2\cdot 3},\quad \mathfrak{C} = \frac{b}{1\cdot\cdots\cdot 5},\quad \mathfrak{D} = \frac{b}{1\cdot\cdots\cdot 7}\quad \text{etc.,}$$

weil welche Reihe mit Sinus und Kosinus summierbar sind, man erschließt, dass

$$y = a\cos\omega - a + b\sin\omega$$

sein wird; daher folgert man:

$$t = -\frac{a(1-\cos\omega)}{\sin\omega} = -a\tan\frac{1}{2}\omega \quad \text{und} \quad \frac{ds}{d\omega} = r = -a,$$

sodass der Krümmungsradius der gesuchten Kurve überall von derselben Größe und daher die Kurve ein Kreis ist.

§18 Weil aber dieses Fortschreitungsgesetz aus einer mehr als aufwändigen und lästigen Rechnung durch Induktion gefolgert worden ist, damit ich nicht wirke dieser oftmals falschen Schlussweise allzu sehr zu vertrauen, kann dasselbe auch auf noch eine andere Weise leichter demonstriert werden. Man setze nämlich

$$y = A + B\cos\omega + C\cos3\omega + D\cos5\omega + E\cos7\omega + \text{etc.},$$

wo ich freilich die geraden Vielfachen weglasse, dass die Größe $\frac{2dy}{d\omega}$ nur Vielfache des Winkels ω umfasst, wie sie der Wert

$$Y = A + B\cos2\omega + C\cos6\omega + D\cos10\omega + E\cos14\omega + \text{etc.}$$

enthält. Weil also

$$\frac{dy}{d\omega} = -B\sin\omega - 3C\sin3\omega - 5D\sin5\omega - 7E\sin7\omega - \text{etc.}$$

ist, geht $Y - \frac{2dy}{d\omega}\sin\omega = 0$ durch Multiplizieren mit $-2\sin\omega$ in

$$\begin{array}{llllll}
-\,B\cos2\omega & -\,3C\cos4\omega & -\,5D\cos6\omega & -\,7E\cos8\omega & -\,9F\cos10\omega & -\,\text{etc.} = 0 \\
B + 3C & +\,5D & +\,7E & +\,9F & +\,11G & \\
A + B & + & +\,C & & +\,D &
\end{array}$$

woher zuerst klar ist, dass $B = -A$ ist, dann aber $C = 0$, $D = 0$, $E = 0$, die folgenden Buchstaben alle verschwinden, sodass

$$y = A(1-\cos\omega).$$

§19 Wenn wir in gleicher Weise

$$y = A + B\sin\omega + C\sin 3\omega + D\sin 5\omega + E\sin 7\omega + F\sin 9\omega + \text{etc.}$$

und daher

$$\frac{dy}{d\omega} = B\cos\omega + 3C\cos 3\omega + 5D\cos 5\omega + 7E\cos 7\omega + \text{etc.}$$

setzen, wird unsere Gleichung diese Form annehmen:

$$\begin{array}{llllll} 0 = & B\sin 2\omega & +\,3C\sin 4\omega & +\,5D\sin 6\omega & +\,7E\sin 8\omega & +\,9F\sin 10\omega + \text{etc.} \\ & -3C & -\,5D & -\,7E & -\,9F & -\,11G \\ -A & -B & & -\,C & & -\,D \end{array}$$

wo $A = 0$ wird, dann aber wie zuvor $C = 0$, $D = 0$, $E = 0$, $F = 0$ etc., sodass man nach Addieren dieser Werte

$$y = a(1 - \cos\omega) + b\sin\omega$$

hat, was die schon zuvor gefundene Lösung ist.

§20 Diese Lösung scheint aber mit Recht nicht hinreichend allgemein, weil wir aus den Werten von y die geraden Vielfachen des Winkels ω ohne Not herausgeworfen haben; denn wenn unter Zulassen von ihnen festlegen:

$$y = A + B\cos\omega + C\cos 2\omega + D\cos 3\omega + E\cos 4\omega + F\cos 5\omega + \text{etc.},$$

dass

$$\frac{dy}{d\omega} = -B\sin\omega - 2C\sin 2\omega - 3D\sin 3\omega - 4E\sin 4\omega - 5F\sin 5\omega - \text{etc.}$$

ist, resultiert die folgende Gleichung

$$\begin{array}{lllllll} 0 = B + 2C\cos\omega & -\,B\cos 2\omega & -\,2C\cos 3\omega & -\,3D\cos 4\omega & -\,4E\cos 5\omega & -\,5F\cos 6\omega \\ & +\,3D & +\,4E & +\,5F & +\,6G & +\,7H \\ \quad +\,A & +\,B & & +\,C & & +\,D \end{array}$$

wo wiederum

$$B = -A, \quad C = 0, \quad D = 0, \quad E = 0, \quad F = 0, \quad G = 0 \quad \text{etc.}$$

ist, sodass nun gewiss scheint, dass sich die vorhergehende Lösung sehr weit erstreckt und außer dem Kreis keine anderen Kurven der Frage Genüge leisten können. Was hier nämlich über die Kosinus gezeigt worden ist, wird in gleicher Weise für die Sinus demonstriert.

§21 Weil also die obige Induktion vollkommen bestätigt ist, sind jene Bestimmungen umso mehr bemerkenswert, die darauf zurückgehen, dass, wenn galt:

$$\begin{aligned}
2^2C &= 2C + \frac{B}{1 \cdot 2 \cdot 3} \\
2^4D &= 3D + \frac{2C}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{B}{1 \cdot \cdots \cdot 5} \\
2^6E &= 4E + \frac{3D}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{2C}{1 \cdot \cdots \cdot 5} + \frac{B}{1 \cdot \cdots \cdot 7} \\
2^8F &= 5F + \frac{4E}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{3D}{1 \cdot \cdots \cdot 5} + \frac{2C}{1 \cdot \cdots \cdot 7} + \frac{B}{1 \cdot \cdots \cdot 9}
\end{aligned}$$

$$\text{etc.,}$$

dann diese Größen so bestimmt werden, dass

$$B = \frac{a}{1 \cdot 2}, \quad C = \frac{a}{1 \cdot \cdots \cdot 4}, \quad D = \frac{a}{1 \cdot \cdots \cdot 6}, \quad E = \frac{a}{1 \cdot \cdots \cdot 8} \quad \text{etc.}$$

ist, welche Werte erscheinen eine sorgfältigere Untersuchung zu verdienen scheinen, wie sie bequem aus jenen Relationen abgeleitet werden.

§22 Aber in gleicher Weise, wenn man dort in § 15 festlegt:

$$y = \mathfrak{A}\omega - \mathfrak{B}\omega^3 + \mathfrak{C}\omega^5 - \mathfrak{D}\omega^7 + \mathfrak{E}\omega^9 - \text{etc.},$$

dass

$$\frac{dy}{d\omega} = \mathfrak{A} - 3\mathfrak{B}\omega^2 + 5\mathfrak{C}\omega^4 - 7\mathfrak{D}\omega^6 + 9\mathfrak{E}\omega^8 - \text{etc.}$$

ist, erhält man diese Gleichung

$$
\begin{array}{rcccccccccl}
0 = 2\mathfrak{A}\omega - & -6\mathfrak{B}\omega^3 & + & 10\mathfrak{C}\omega^5 & - & 14\mathfrak{D}\omega^7 & + & 18\mathfrak{E}\omega^9 & - & \text{etc.} \\
 & - & 2\alpha\mathfrak{A} & + & 6\alpha\mathfrak{B} & - & 10\alpha\mathfrak{C} & + & 14\alpha\mathfrak{D} & \\
 & & & + & 2\beta\mathfrak{A} & - & 6\beta\mathfrak{B} & + & 10\beta\mathfrak{C} & \\
 & & & & & - & 2\gamma\mathfrak{A} & + & 6\gamma\mathfrak{B} & \\
 & & & & & & & + & 2\delta\mathfrak{A} & \\
-2\mathfrak{A} & + & 2^3\mathfrak{B} & - & 2^5\mathfrak{C} & + & 2^7\mathfrak{D} & + & 2^9\mathfrak{E} & + \text{etc.,}
\end{array}
$$

woher diese Bestimmungen entspringen:

$$
\begin{aligned}
2^2\mathfrak{B} &= 3\mathfrak{B} + \frac{\mathfrak{A}}{1\cdot 2\cdot 3} \\
2^4\mathfrak{D} &= 5\mathfrak{C} + \frac{3\mathfrak{B}}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{\mathfrak{A}}{1\cdot\cdots\cdot 5} \\
2^6\mathfrak{D} &= 7\mathfrak{D} + \frac{5\mathfrak{C}}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{3\mathfrak{B}}{1\cdot\cdots\cdot 5} + \frac{\mathfrak{A}}{1\cdot\cdots\cdot 7} \\
2^8\mathfrak{E} &= 9\mathfrak{E} + \frac{7\mathfrak{D}}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{5\mathfrak{C}}{1\cdot\cdots\cdot 5} + \frac{3\mathfrak{B}}{1\cdot\cdots\cdot 7} + \frac{\mathfrak{A}}{1\cdot\cdots\cdot 9} \\
&\text{etc.,}
\end{aligned}
$$

welche entwickelt die folgenden Werte an die Hand gegen:

$$
\mathfrak{A} = b, \quad \mathfrak{B} = \frac{b}{1\cdot 2\cdot 3}, \quad \mathfrak{C} = \frac{b}{1\cdot\cdots\cdot 5}, \quad \mathfrak{D} = \frac{b}{1\cdot\cdots\cdot 7} \quad \text{etc.,}
$$

welches einfache Fortschreitungsgesetz nur über viele Umwege aus jenen Formeln abgeleitet wird, und daher wird eine verständlichere Erklärung besonders vermisst.

§23 Und in der Tat scheint auch dieses Argument nicht hinzureichen um zu zeigen, dass außer dem Kreis keine anderen Kurven unserer Frage Genüge leisten. Weil nämlich die Gleichung

$$
Y = \frac{2dy}{d\omega}\sin\omega
$$

so aufgelöst werden muss, dass Y eine solche Funktion von 2ω ist, wie y eine von ω ist, scheint die hier verwendete Auflösung die Natur der Frage keineswegs zu erschöpfen, weil wir für y eine Reihe solcher Art angenommen haben, in welcher nur Potenzen von ω auftauchen, deren Exponenten ganze Zahlen sind, obgleich vielleicht gebrochene oder negative oder sogar irrationale und imaginäre auftreten könnten, wobei sich die imaginären natürlich gegenseitig aufheben. Weil das passieren kann, wollen wir festlegen:

$$y = A\omega^{\alpha} + B\omega^{\beta} + C\omega^{\gamma} + \text{etc.},$$

von welchen Exponenten der erste α der kleinste sei. Es wird also

$$\frac{dy}{d\omega} = \alpha A\omega^{\alpha-1} + \beta B\omega^{\beta-1} + \text{etc.}$$

sein, welche Reihe mit

$$2\sin\omega = 2\omega - \frac{2}{1\cdot 2\cdot 3}\omega^3 + \frac{2}{1\cdot 2\cdots 5}\omega^5 - \text{etc.}$$

multipliziert diese Formel liefert

$$\begin{aligned} &2\alpha A\omega^{\alpha} + 2\beta B\omega^{\beta} + \text{etc.} \\ -&\frac{2\alpha A}{1\cdot 2\cdot 3}\omega^{\alpha+2} - \frac{2\beta B}{1\cdot 2\cdot 3}\omega^{\beta+2} - \text{etc.} \\ +&\frac{2\alpha A}{1\cdot\cdots\cdot 5}\omega^{\alpha+4} + \text{etc.}, \end{aligned}$$

welche

$$Y = 2^{\alpha}A\omega^{\alpha} + 2^{\beta}B\omega^{\beta} + 2^{\gamma}C\omega^{\gamma} + \text{etc.}$$

gleich zu machen ist. Es ist also notwendig, dass die untersten Potenzen auf beiden Seiten gleich sind, woher $2^{\alpha} = 2\alpha$ ist, was reell nur auf zwei Weisen passieren kann, indem man $\alpha = 1$ oder $\alpha = 2$ nimmt, woher die oben angenommene Reihe die ganze Aufgabe zu erledigen scheint.

§24 Weil aber kein Zweifel besteht, dass die Gleichung $2^{\alpha} = 2\alpha$ außer diesen zwei Wurzeln unendlich viele andere imaginäre umfasst, entsteht mit Recht der Verdacht, dass aus ihnen auch nützliche Lösung entspringen können. Und daher glaube ich, dass es nicht unpassend sein wird eine Methode angegeben zu haben, mit welcher sich auch die imaginären Wurzeln dieser Gleichung zumindest näherungsweise bestimmen lassen. Weil also α eine imaginäre Zahl ist, ist ihre Form gewiss von dieser Art

$$\alpha = \mu + \nu\sqrt{-1},$$

woher

$$2^{\alpha} = 2^{\mu} \cdot 2^{\mu\sqrt{-1}} = 2^{\mu}(\cos(\nu \log 2) + \sqrt{-1} \cdot \sin(\nu \log 2))$$

wird, welcher $2\alpha = 2\mu + 2\nu\sqrt{-1}$ so gleich gesetzt werden muss, dass die reellen und imaginären Anteile jeweils gleich werden: Daher wird also

$$2\mu = 2^{\mu} \cos(\nu \log 2) \quad \text{und} \quad 2\nu = 2^{\mu} \sin(\nu \log 2)$$

und daher

$$4(\mu\mu + \nu\nu) = 2^{2\mu} \quad \text{und} \quad \nu = \sqrt{2^{2\mu-2} - \mu\mu}.$$

Wir wollen $\frac{\mu}{2^{\mu-1}} = \cos\varphi$ setzen, und es entspringt

$$\nu = 2^{\mu-1} \sin\varphi = \mu \tan\varphi.$$

Weil also

$$\cos(\nu \log 2) = \frac{\mu}{2^{\mu-1}} = \cos\varphi$$

ist, folgt, dass $\nu \log 2 = 2n\pi \pm \varphi$ sein wird, wobei $2n\pi$ irgendein Vielfaches des ganzen Umfangs bezeichnet. Daher hat man

$$\mu \log 2 \cdot \tan\varphi = 2n\pi \pm \varphi \quad \text{und} \quad \mu = \frac{2n\pi \pm \varphi}{\log 2 \cdot \tan\varphi},$$

welcher Wert mit dem aus der Formel $\mu = 2^{\mu-1}\cos\varphi$ entspringenden Formel übereinstimmen muss. Es ist aber offensichtlich, dass dies wegen der beliebigen ganzen Zahl n auf unendlich viele Weisen passieren kann. Natürlich wird durch Nehmen von $n = 1$ und Setzen von

$$\mu = \frac{2\pi - \varphi}{\log 2 \cdot \tan\varphi},$$

wird nach einigen Approximationen der Winkel $\varphi = 61^{\circ}24'24''$ berechnet und daher

$$\mu = 4,0980836 \quad \text{und} \quad \nu = 7,51850,$$

sodass

$$\alpha = \mu \pm \nu\sqrt{-1} = 4,0980836 \pm 7,51850\sqrt{-1}$$

ist.

§25 Nachdem also imaginäre Werte dieser Art für α gefunden worden sind, dass $2^\alpha = 2\alpha$ ist, muss eine solche Form für y angesetzt werden:

$$y = A\omega^\alpha - B\omega^{\alpha+2} + C\omega^{\alpha+4} - D\omega^{\alpha+6} + \text{etc.},$$

woher

$$Y = 2\alpha A\omega^\alpha - 2^3\alpha B\omega^{\alpha+2} + 2^5\alpha C\omega^{\alpha+4} - 2^7\alpha D\omega^{\alpha+6} + \text{etc.}$$

wird, welche Reihe

$$\frac{2dy}{d\omega}\sin\omega = \frac{dy}{d\omega}\left(2\omega - \frac{2}{1\cdot 2\cdot 3}\omega^3 + \frac{2}{1\cdot\cdots\cdot 5}\omega^5 - \text{etc.}\right)$$

gleich zu setzen ist, natürlich diesem Ausdruck

$$\begin{array}{llll} 2\alpha A\omega^\alpha & -\, 2(\alpha+2)B\omega^{\alpha+2} & +\, 2(\alpha+4)C\omega^{\alpha+4} & - \text{etc.} \\ & -\, \dfrac{2\alpha A}{1\cdot 2\cdot 3} & +\, \dfrac{2(\alpha+2)B}{1\cdot 2\cdot 3} & \\ & & +\, \dfrac{2\alpha A}{1\cdot\cdots\cdot 5} & \end{array}$$

woher die folgenden Bestimmungen berechnet werden:

$$\begin{aligned} 2^2\alpha B &= (\alpha+2)B + \frac{\alpha A}{1\cdot 2\cdot 3} \\ 2^4\alpha C &= (\alpha+4)C + \frac{(\alpha+2)B}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{\alpha A}{1\cdot\cdots\cdot 5} \\ 2^6\alpha D &= (\alpha+6)D + \frac{(\alpha+4)C}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{(\alpha+2)B}{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot 5} + \frac{\alpha A}{1\cdot\cdots\cdot 7} \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

§26 Daher lassen sich ohne Zweifel die Koeffizienten B, C, D etc. so bestimmen, aber damit wirklich jeder Zweifel ausgeräumt ist, ob auf diese Weise für y reelle Werte erhalten werden können, ist zu bemerken, dass zwei geeignete für y gefundene Werte immer miteinander verbunden werden können. Nachdem dies bemerkt worden ist, wollen wir festlegen, dass aus dem Wert $\alpha = \mu + \nu\sqrt{-1}$ $y = P$ hervorgegangen ist, aus dem Wert $\alpha = \mu - \nu\sqrt{-1}$ hingegen $y = Q$ wird; wie imaginär auch immer die beiden Ausdrücke waren, es ist gewiss, dass aus ihnen ein reeller von dieser Art $y = mP + nQ$ konstruiert werden kann, und das auf zweifache Weise. Und aus dieser angenommenen Form $\alpha = \mu + \nu\sqrt{-1}$ werden die Reihen für y so beschaffen sein:

$$y = \omega^{\mu} \cos(\nu \log \omega) \cdot (A + B\omega^2 + C\omega^4 + D\omega^6 + \text{etc.})$$

oder

$$y = \omega^{\mu} \cos(\nu \log \omega) \cdot (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}\omega^2 + \mathfrak{C}\omega^4 + \mathfrak{D}\omega^6 + \text{etc.}),$$

deren Summe oder Differenz ebenso einen hinreichenden Wert für y geben. Es ist aber ersichtlich, dass diese Werte keineswegs in eine nach einfachen Potenzen von ω fortschreitende Reihe umgewandelt werden können. Aber Formen von dieser Art können direkt von Anfang an angesetzt werden; dort, weil $\cos(\nu \log 2\omega)$ in Y enthalten ist, ist zu bemerken, dass gilt:

$$\cos(\nu \log 2\omega) = \cos(\nu \log \omega) \cdot \cos(\nu \log 2) - \sin(\nu \log \omega) \cdot \sin(\nu \log 2).$$

§27 Damit diese Rechnung, durch welche unendlich viele andere Lösungen des Problems gegeben zu werden scheinen, aber nicht allzu lästig wird, möchte ich vermuten, dass dasselbe aus der Relation zwischen den Krümmungsradien der Evolute leichter gezeigt werden kann. Weil wir nämlich in Paragraph 12

$$4R' = 3r' \cos \omega + \frac{dr'}{d\omega} \sin \omega$$

gefunden haben, muss, wenn wir ansetzen:

$$r' = A\omega^n + B\omega^{n+2} + C\omega^{n+4} + \text{etc.},$$

dass

$$R' = 2^n A\omega^n + 2^{n+2} B\omega^{n+2} + 2^{n+4} C\omega^{n+4} + \text{etc.}$$

ist, für die kleinste Potenz ω^n

$$4 \cdot 2^n A = 3A + nA \quad \text{oder} \quad 4 \cdot 2^n = 3 + n = 2^{n+2}$$

sein, welcher Bedingung auf zwei Weisen Genüge leistet wird, zum einen für $n = -2$, zum anderen für $n = -1$. Wir wollen also

$$r' = \frac{A}{\omega} + B\omega + C\omega^3 + D\omega^5 + \text{etc.}$$

setzen, es wird

$$\begin{aligned}
\frac{dr'}{d\omega} &= -\frac{A}{\omega^2} + B + 3C\omega^2 + 5D\omega^4 + \text{etc.}\\
R' &= \frac{A}{2\omega} + 2B\omega + 8C\omega^3 + 32D\omega^5 + \text{etc.}
\end{aligned}$$

sein, woher man ableitet, dass sein muss:

$$\begin{array}{rcccc}
\frac{2A}{\omega} + & 8B\omega & + \; 32C\omega^3 & + \; 128D\omega^5 & + \text{etc.}\\
= 3A\frac{1}{\omega} + & 3B\omega & + \; 3C\omega^3 & + \; 3D\omega^5 & \\
 & - \; \frac{3A}{1\cdot 2} & - \; \frac{3B}{1\cdot 2} & - \; \frac{3C}{1\cdot 2} & \\
 & & + \; \frac{3A}{1\cdot\cdots\cdot 4} & + \; \frac{3B}{1\cdot\cdots\cdot 4} & \\
 & & & - \; \frac{3A}{1\cdot\cdots\cdot 6} & \\
-A + & B & - \; 3C & + \; 5D & \\
 & + \; \frac{A}{1\cdot\cdots\cdot 3} & - \; \frac{B}{1\cdot\cdots\cdot 3} & - \; \frac{3C}{1\cdot\cdots\cdot 3} & \\
 & & - \; \frac{A}{1\cdot\cdots\cdot 5} & + \; \frac{B}{1\cdot\cdots\cdot} & \\
 & & & + \; \frac{A}{1\cdot\cdots\cdot 7} &
\end{array}$$

und daher werden Werte solcher Art gefunden, die jedenfalls reelle Werte zu liefern scheinen. Dennoch wird indes immer noch eine Methode vermisst, dieses Problem vollständiger aufzulösen.